Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

# Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

## Blatt 3

**Abgabe:** Freitag, den 17. November 2023, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

**Aufgabe 3.1** *(1+1+1+1 Punkte)*

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ für $n > 1$ ein kommutativer Ring mit Eins ist. Überprüfen Sie hierfür die folgenden (Ring-)Axiome:

(a) Assoziativität von $\cdot_n$
(b) Kommutativität von $\cdot_n$
(c) Distributivität von $\cdot_n$ und $+_n$
(d) Existenz eines neutralen Elements für $\cdot_n$

**Aufgabe 3.2** *(3+1 Punkte)*

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins und $R^\times := \{x \in R \mid \exists\, y \in R\colon x \cdot y = 1 = y \cdot x\}$ die Menge aller (multiplikativ) invertierbaren Elemente von $R$.

(a) Zeigen Sie, dass $(R^\times, \cdot)$ eine Gruppe ist.

Sei $(R, +, \cdot)$ nun insbesondere ein kommutativer Ring mit Eins.

(b) Zeigen Sie, dass $(R^\times, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

$(R^\times, \cdot)$ wird die *Einheitsgruppe* des Rings $(R, +, \cdot)$ genannt.

**Aufgabe 3.3** *(4 Punkte)*

Betrachten Sie für $n > 1$ die Einheitsgruppe $(\mathbb{Z}_n^\times, \cdot_n)$ des Rings $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$. Zeigen Sie

$$\mathbb{Z}_n^\times = \{x \in \{0, \ldots, n-1\} \mid \operatorname{ggT}(x, n) = 1\}.$$

**Aufgabe 3.4** *(4 Punkte)*

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $a, b \in \mathbb{N}$ mit $p|ab$. Zeigen Sie $p|a$ oder $p|b$.